François Rouvière - Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation p 152-156

JP Demailly Analyse numérique et équations différentielles p 1-19.

209

218

223

224

226

228

229

253

Développement : Méthode de Newton

Théorème : Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose que $c<d$, $f(c)<0<f(d)$ et $f'(x)>0$ pour tout $x \in [c,d]$. On considère la suite récurrente : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \phi(x_n)$ avec $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Alors en notant a l'unique valeur d'annulation de f, on a :

i) Il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha] = I$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a de manière quadratique et il existe $C>0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|x_{n+1} - a| \leqslant C|x_n - a|^2$$

ii) Si de plus, pour tout $x \in [a,d]$, $f''(x)>0$, alors pour tout $x_0 \in [a,d]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (ou constante) et :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant x_{n+1} - a \leqslant C(x_n - a)^2 \\ x_{n+1} - a \underset{+\infty}{\sim} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2 \text{ pour } x_0 > a. \end{cases}$$

Démo :

$f'>0$

f est C^1 donc cont.

① On sait que f est strictement croissante et que $0 \in]f(c), f(d)[$. Ainsi d'après le TVI, $\exists!\, a \in]c,d[$, $f(a)=0$. Le but de la méthode de Newton est d'approcher a à partir d'une valeur grossière x_0 qui aura été déterminée précédemment (par exemple par dichotomie (voir Annexe)).

L'idée est de remplacer la courbe représentative de f par sa tangente au point x_0 :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

x_1 est en général une meilleure approximation de a que x_0. On veut donc réitérer la fonction ϕ afin de créer une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a.

② i) Puisque $f(a)=0$, on peut écrire, pour $x \in [c,d]$,

$$\phi(x) - a = x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)} = \frac{f(a) - f(x) - (a-x)f'(x)}{f'(x)}$$

X.G p 71

En appliquant la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 2 il existe $z_x \in [\min(a,x), \max(a,x)]$ tel que : $\phi(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z_x)}{f'(x)}(x-a)^2$

max et min existent car f est C^2 sur 1 compact

Pas besoin de prendre $|f'|$ car $f'>0$

Prenons $C = \frac{\max_{[c,d]}|f''|}{2\min_{[c,d]} f'}$ et on obtient $|\phi(x) - a| \leqslant C|x-a|^2$. $x \in [c,d]$

Scanné avec CamScanner

Soit $\alpha > 0$ assez petit pour que $C\alpha < 1$ et $I = [a-\alpha, a+\alpha] \subset [c,d]$

Alors $x \in I$ entraîne que $|\phi(x) - a| \leq C\alpha^2 < \alpha$ d'où $\phi(I) \subset I$.

Ainsi, si $x_0 \in I$, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, $x_m \in I$ et :

$$|x_{m+1} - a| = |\phi(x_m) - a| \leq C|x_m - a|^2$$

par récurrence ?

d'où $\quad C|x_m - a| \leq (C|x_0 - a|)^{2^m} \leq (C\alpha)^{2^m}$.

On obtient la convergence quadratique de x_m vers a puisque $C\alpha < 1$.

stricte
, positivité de f et $x > a$.

③ ii) Pour $a < x \leq d$, on a $f'(x) > 0$ et $f(x) > 0$ d'où $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} < x$

D'après i) on a $\phi(x) - a = \frac{1}{2} \times \frac{f''(z_x)}{f'(x)}(x-a)^2 > 0$

Ces deux inégalités montrent que $I = [a,d]$ est stable par ϕ et que pour $a < x_0 \leq d$, les itérés de x_m vérifient aussi $a < x_m \leq d$ et forment une suite strictement décroissante. Si $x_0 = a$, la suite est constante. La suite (x_m) admet donc une limite l, qui vérifie $\phi(l) = l$, donc $f(l) = 0$ et $l = a$ (car f s'annule uniquement en a sur $[c,d]$ par ①)

La convergence des x_m vers a est quadratique et on a, comme en i),

$$0 \leq x_{m+1} - a \leq C(x_m - a)^2$$

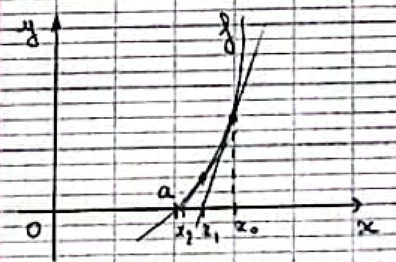
Enfin cette inégalité est essentiellement optimale, si $a < x_0 \leq d$, on a $x_m > a$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et : $\frac{x_{m+1} - a}{(x_m - a)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(z_m)}{f'(x_m)}$ d'après i), avec

$(x_m) \to a$ par ii)

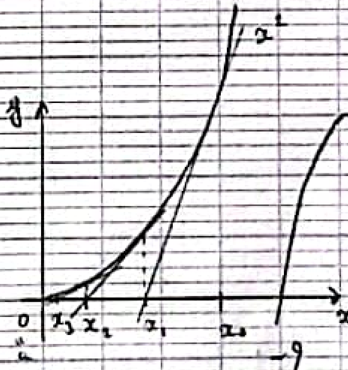
$a < z_m < x_m$. La fraction tend donc vers $\frac{f''(a)}{2f'(a)}$ lorsque $m \to +\infty$.

$x_m \to a$ donc $z_m \to a$ (Thm des gendarmes)

Annexe :



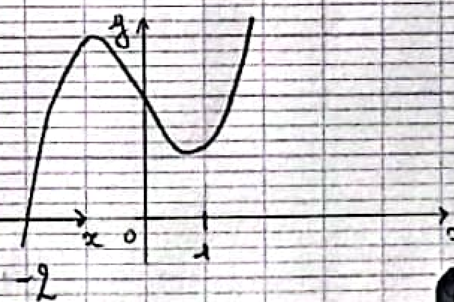
Pour illustrer l'idée



Exemple 1

$x \mapsto x^2$ est cvx

Tout se passe bien (peu importe le choix de x_0)



Exemple 2

$x \mapsto x^3 - 2x + 2$

et $x_0 = 0$ me cv pas.

On peut aussi prendre arctan et $x_0 = 10$.

+ facile à retenir.

Scanné avec CamScanner